ING. MECCANICA → ALGEBRA

"ALGEBRA"

QUAD. 1

INIETTIVA: ELEMENTI DISTINTI HANNO LA STESSA IMMAGINE. OGNI ELEMENTE DI B È L'IMMAGINE AL PIÙ DI UN SOLO ELEMENTO DI A.

SURIETTIVA: OGNI ELEMENTO DI B È UN'IMMAGINE DI ALMENO UN ELEMENTO.

SPAN: GENERATORE DI V. GENERA VETTORI DI UN SOTTOSPAZIO.

BASE: INSIEME DI VETTORI DI V CHE SONO INDIPENDENTI TRA LORO, E V = SPAN(...)

IMMAGINE: INSIEME DEGLI ELEMENTI DELLA FORMA T(v) AL VARIARE DI v ∈ V. OGNI ELEMENTO DI V È UNA COMBINAZIONE LINEARE

NUCLEO: DIMENSIONE DELL'INSIEME È UGUALE A dim KerT + dim T

3 blister/63 compresse

- T È SURIETTIVA SE E SOLO SE ImT = W
- T È INIETTIVA SE E SOLO SE KerT = {0}
- T È SURIETTIVA SE E SOLO SE dim T = dim W
- T È INIETTIVA SE E SOLO SE dim T = dim V

T: V → W

TEOREMI

GRASSMAN: dim U+W = dim U + dim W − dim (U∩W)

LA PLACE: M_{ij} SI OTTIENE ELIMINANDO RIGA i e COLONNA j.

BINET: DET(A·B) = DETA · DETB

ORLATI: SI SCOPRE IL NUMERO DI COLONNE LINEARMENTE INDIP. QUINDI IL RG. SI CONSIDERA UNA SOTTOMATRICE E AGGIUNGENDO UNA RIGA E UNA COLONNA

3 blister/63 compresse

SFERA

$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$

$r \neq \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}$

RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI

r(t) = A + t(B−A) parametrica

{ ... sostituendo cartesiana

n = raggio circonferenza

$r = \sqrt{R^2 - d^2(C, \pi_2)}$

$d = \frac{|x\cdot x_0 + y\cdot y_0 + z\cdot z_0|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ← coeff del piano · coordinate centro

$(\text{coeff})^2$

LOETTE

3 blister/63 compresse

CIRCONFERENZA

$d(C,P) = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = r$

DISTANZA PIANO

$d(P_0,\pi) = \frac{|a\cdot x_P + b\cdot y_P + c\cdot z_P + k|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

PIANO PASSANTE PER UN PUNTO

$\lambda(ax+by+cz+d) + \mu(a'x+b'y+c'z+d')$

$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

DISTANZA TRA 2 PUNTI

$d(P,H) = \sqrt{(x_H-x_P)^2+(y_H-y_P)^2+(z_H-z_P)^2}$

LOETTE

3 blister/63 compresse

1TQ80RSP

ALGEBRA LINEARE e GEOMETRIA

RICORDA:
- USA LA BASE CANONICA SE TUO:
- EQUAZIONE CARTESIANA
  $\{ax+by+c$ ecc
- EQUAZIONE PARAMETRICA
  $\begin{cases} x=\dots \\ y=\dots \\ z=\dots \end{cases}$
- ROUCHÉ-CAPELLI
  Se il sistema è risolubile
  $rgA' = rgA$

master COPY COPISTERIA

2·10·2013

INSIEMI

A $a \in A$ $\in$ = appartiene $\subset$ = strettamente incluso

A $\neg(a \in A)$ $\neg$ = non appartiene = $\notin$

$B \subseteq A$ B è incluso in A o coincide con A

$B \subseteq A$ $\{\forall b \in B \Rightarrow b \in A\}$ $\Rightarrow$ = implica

$\Leftrightarrow$ = doppia implicaz.

consideriamo p e q come semplici proposizioni

$p \Rightarrow q$ → p implica q → se p è vera q è vera (sempre)

$A \cup B = \{s \in S; s \in A \vee s \in B\}$ $\cup$ = & $\vee$ = oppure

$A, B \subseteq S$ insieme di riferimento

$A \cap B = \{s \in S; s \in A \wedge s \in B\}$ $\cap$ = intersecato $\wedge$ = e

$A / B = \{s \in S : s \in A \wedge s \notin B\}$ / = meno

$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$ $\times$ = diverso

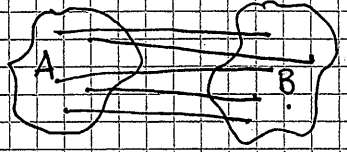
ESEMPIO DIVERSO

$A\{1;2;4\}$ $B\{3;5\}$ → $A \times B = (1;3), (1;5), (2;3), (2;5), (4;5), (4;3)$ $a \in A \wedge b \in B$

f = applicazione $f: A \to B$

Per ogni elemento di $a \in A$ esiste una sola ~~$b \in f(a)$~~ sola immagine in B.

- Iniettiva: sia f una funzione definita da un insieme A a un insieme B. Si dice che f è una funzione iniettiva se comunque si scelgano due elementi x_1 e $x_2 \in A$ allora
  $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$
  oppure in forma equivalente $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  È quindi iniettiva se elementi distinti hanno sempre immagini diverse oppure due elementi che hanno la stessa immagine coincidono.
  Ciascun elemento di B è l'immagine al più di un solo elemento di A.



INIETTIVA

$\{\forall b \in B \; \exists a : f(a) = b\}$

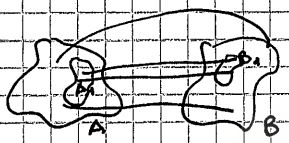
master COPY CORISTERIA

·SURIETTIVA: si dice che f è una funzione suriettiva se $F(A)=B$ cioè se il codominio di f coincide con B.
Quindi se ogni elemento di B è un immagine di almeno un elemento di A.



SURIETTIVA

$f:(A) \to B \qquad B_1 \subseteq B$



$f^{-1}(B_1)$ tutti gli elementi di A_1 la cui immagine appartiene a B_1

$f^{-1}(B) = A$

COMPOSIZIONE

$f: A \to B$
$g: B \to C$ per poter fare la composizione $f(B)=g(B)$

$g \circ f : a \in A \xrightarrow{f} f(a) \in B \xrightarrow{g} g(f(a)) \in C$ ∘ = composizione

$g \circ f(a) = g(f(a))$

ESEMPIO:

$f: x \in \mathbb{R} \to 2x+1 \in \mathbb{R}$

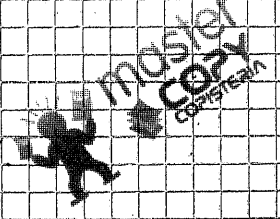
$g: x \in \mathbb{R} \to x^2 \in \mathbb{R}$

$g \circ f : \quad x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} 2x+1 \xrightarrow{g} (2x+1)^2 \in \mathbb{R}$

la composizione non gode della proprietà commutativa

$f \circ g : \quad x \in \mathbb{R} \xrightarrow{g} x^2 \xrightarrow{f} 2x^2+1 \in \mathbb{R}$

due applicazioni sono uguali quando coincidono tutte le x dell'insieme di partenza



p (sempre vera) $\to \forall x \in p(x)$ — L'insieme

p (non vera) $\to \neg(\forall x\, p(x)) \iff \exists x \neg p(x)$

ESEMPIO

p = tutti i numeri primi sono dispari

$p(x)$ falsa perché esiste 2 primo pari

$p \Rightarrow q$ vera $p \to$ vera q (sempre)

$\{p \Rightarrow q\} \iff \{\neg q \Rightarrow \neg p\}$

Metodi di dimostrazione che l'applicazione precedente è INIETTIVA

① $\neg q \Rightarrow p \Rightarrow q$ impossibile $\neg q \Rightarrow q$

un'affermazione non può essere sia vera che falsa

f iniettiva $\iff x \neq y \iff f(x) \neq f(y)$

METODO DIRETTO $p \Rightarrow q$

$\neg q \Rightarrow \neg p$

$f(x) = f(y) \Rightarrow (x) = (y)$

ES.

$f : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (2x+1) \in \mathbb{R}$ (Elementi distinti corrispondono a immagini distinte)

$f(x) \neq f(y)$

$x \neq y \Rightarrow 2x \neq 2y \Rightarrow 2y+1 \neq 2x+1$

② $\neg q \Rightarrow \neg p$

$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x+1 = 2y+1 \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$

Quindi l'applicazione è iniettiva se e solo se $\{x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\}$

INSIEMI, GRUPPI, CORPI E CAMPI

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

naturali $\subset$ interi & naturali $\subset$ razionali $\subset$ reali $\subset$ complessi

$A(+)$

Insieme chiuso: quando il risultato non esce da A rispetto all'operaz.

$$\forall a, a' \Rightarrow a + a' \in A$$

1) $\forall a, b, c \quad (a+b)+c = a+(b+c)$ proprietà associativa

2) $\exists 0_A : \forall a \quad a + 0_A = 0_A + a = a$ elemento neutro 0_A

3) $\forall a \; \exists (-a) : \quad a + (-a) = 0_A = (-a) + a$ esistenza dell'opposto

$A(+)$ 1,2,3 GRUPPO

$\mathbb{N}(+)$ non è un Gruppo perché non c'è l'opposto

4) $\forall a, b \quad a+b = b+a$ proprietà commutativa

$A(+)$ 1,2,3,4 Gruppo Commutativo

$\mathbb{N}(+)$ non lo è